CHAPITRE E1

Systèmes linéaires

Ce chapitre s'inscrit dans la continuité de la PTSI : après avoir défini ce qu'est un système linéaire continu invariant, on rappellera les principaux outils à disposition pour les étudier. Enfin, on s'intéressera à un critère particulier : la stabilité des systèmes.

I - Définitions et propriétés

I.A - Système Linéaire, Continu et Invariant

I.A.1 - Système linéaire

Définition (Système linéaire)

Un système est dit **linéaire** s'il vérifie le principe de superposition.

Principe de superposition

Si pour une entrée $e_1(t)$, le système répond par $s_1(t)$ et pour une entrée $e_2(t)$, la réponse est $s_2(t)$, alors le système satisfait le principe de superposition si et seulement si la sortie associée à $\lambda e_1(t) + \mu e_2(t)$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ est $\lambda s_1(t) + \mu s_2(t)$.

Exemples :

▹ Loi d'Ohm $u = Ri$. Arbitrairement, choisissons u la sortie et i l'entrée.
Si R est parcourue par un courant i_1, la tension à ses bornes sera $u_1 = Ri_1$
De même, si R est parcourue par un courant i_2, la tension sera $u_2 = Ri_2$.

Si R est parcourue par $i = \lambda i_1 + \mu i_2$, alors la tension à ses bornes sera
$u = Ri = R(\lambda i_1 + \mu i_2) = \lambda Ri_1 + \mu Ri_2 = \lambda u_1 + \mu u_2$ ✓ *(d'où "dipôle linéaire")*

▹ Puissance dissipée par une résistance $\mathcal{P} = Ri^2$. Arbitrairement, choisissons $\mathcal{P}$ la sortie et i l'entrée.
Si R est parcourue par un courant i_1, la puissance dissipée sera $\mathcal{P}_1 = Ri_1^2$
De même, si R est parcourue par un courant i_2, la puissance dissipée sera $\mathcal{P}_2 = Ri_2^2$.

Si R est parcourue par $i = \lambda i_1 + \mu i_2$, alors la puissance dissipée sera
$\mathcal{P} = Ri^2 = R(\lambda i_1 + \mu i_2)^2 = \lambda^2 Ri_1^2 + \mu^2 Ri_2^2 + 2\lambda\mu Ri_1 i_2 \neq \lambda\mathcal{P}_1 + \mu\mathcal{P}_2$ ⊗ *non linéarité*

Remarque

Un système linéaire est un **modèle** : la plupart des systèmes linéaires ne le sont que dans un domaine donné (on parle de domaine de linéarité)

I.A.2 - Système continu et invariant

Définition (Système continu)

Un système est dit **continu** s'il traite des grandeurs ($e(t)$, $s(t)$) définies pour tout t et pouvant prendre n'importe quelle valeur (en opposition par exemple aux signaux numériques qui sont discrets)

Définition (Système invariant temporellement)

Un système est dit **invariant temporellement** si ses caractéristiques ne dépendent pas du temps.
Autrement dit, si $s(t)$ est réponse à $e(t)$, si on "décale" l'origine des temps de τ, $s(t-\tau)$ est la réponse à l'entrée $e(t-\tau)$:

Remarque
Un système invariant temporellement est un **modèle** : la plupart des systèmes ont des composants qui subissent les effets du temps. Cependant sur les durées des expériences, on peut considérer ces effets comme négligeables.

I.B - Exemple de SLCI : système régi par une équation différentielle linéaire à coefficients constants

Propriété

Un système qui vérifie une équation différentielle linéaire à coefficients constants est un SLCI.

Remarque ⚠
Ce n'est pas une équivalence ! Il existe des SLCI qui ne sont PAS régis par une équation différentielle linéaire à coefficients constants *(par exemple l'opérateur retard).*

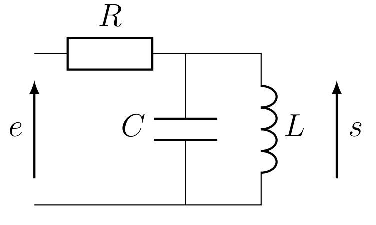
MAIS si un SLCI est régi par une équation différentielle, alors cette dernière sera nécessairement linéaire à coefficients constants.

Rappel - Formes canoniques des EDL à coefficients constants des 1er et 2ème ordre

Méthode - Établir l'ED dans un circuit électronique

Application - SF1

Déterminer l'équation différentielle satisfaite par s



Propriété IMPORTANTE

Si l'entrée d'un système linéaire est sinusoïdale, la sortie le sera aussi et sera de même fréquence.

Corollaire
Si l'entrée d'un système est sinusoïdale, mais que la sortie ne l'est pas ou est sinusoïdale à une fréquence différente, alors on peut en déduire que le système n'est pas linéaire

II - L'outil principal pour étudier les systèmes linéaires : la fonction de transfert

II.A - Rappels RSF

Définition (RSF et représentation complexe)

Propriétés - rappels

En RSF, l'entrée des SLCI est sinusoïdale, donc la sortie aussi, de même pulsation.
$\Rightarrow$ pour connaître la sortie (c'est généralement ce qu'on recherche), il suffit de connaître son **amplitude** et sa **phase à l'origine**.
C'est la **fonction de transfert** qui permet de déterminer ces caractéristiques en fonction de celles de l'entrée.

Définition (Fonction de transfert)

Opération complexe		
Vocabulaire		
Expressions		
Information		

Méthode - Détermination de la réponse temporelle en RSF

Si on considère un signal d'entrée $e(t) = E_0 \cos(\Omega t + \psi)$, alors le signal de sortie s'écrit

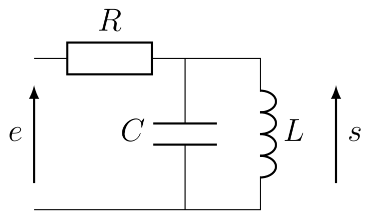
II.B - Obtention de la fonction de transfert

Méthode - Obtenir la fonction de transfert via les impédances complexes

Méthode - Obtenir la fonction de transfert via l'ED

Application - SF1

Via les deux méthodes, déterminer la fonction de transfert du système suivant :



Remarque
La méthode fonctionne aussi pour trouver l'ED si on connait la fonction de transfert !
⇒ à vérifier sur l'exemple de l'appli à la maison.

II.C - Représentation de la fonction de transfert

Définition (Diagramme de Bode)

Souvent, on vous demandera de tracer le diagramme asymptotique plutôt que le diagramme réel (sauf en TP !).

Méthode - Tracer un diagramme de Bode asymptotique

Application - SF2

On reprend le circuit du SF1. Tracer le diagramme de Bode asymptotique.

II.D - Généralisation : intérêt de la fonction de transfert

II.D.1 - Décomposition en série de Fourier d'un signal périodique

DSF

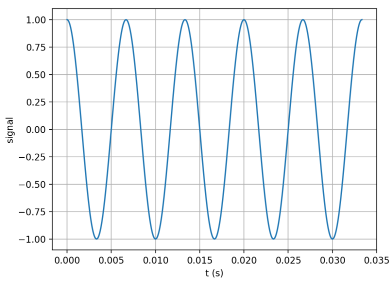
Tout signal périodique de pulsation ω_e peut se décomposer comme une somme de signaux sinusoïdaux de pulsations multiples de ω_e :

cf script Python sur le site

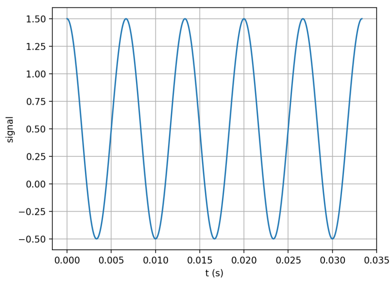
Vocabulaire

Exemples de signaux et spectres associés

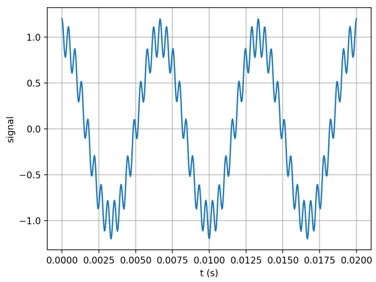
▷ signal sinusoïdal pur : $s(t) = S_0 \cos(\omega_e t)$



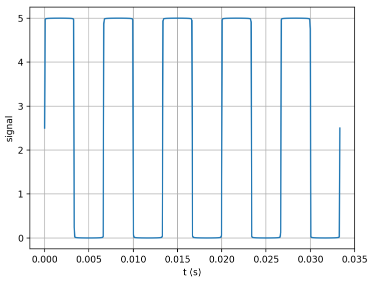
▷ signal sinusoïdal avec une composante continue : $s(t) = S_m + S_0 \cos(\omega_e t)$



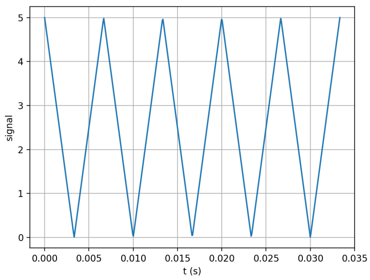
▷ somme de deux signaux sinusoïdaux $(\omega_1 < \omega_2)$: $s(t) = S_0 \cos(\omega_1 t) + 0,2 S_0 \cos(\omega_2 t)$



▷ signal créneau :



▷ signal triangle :

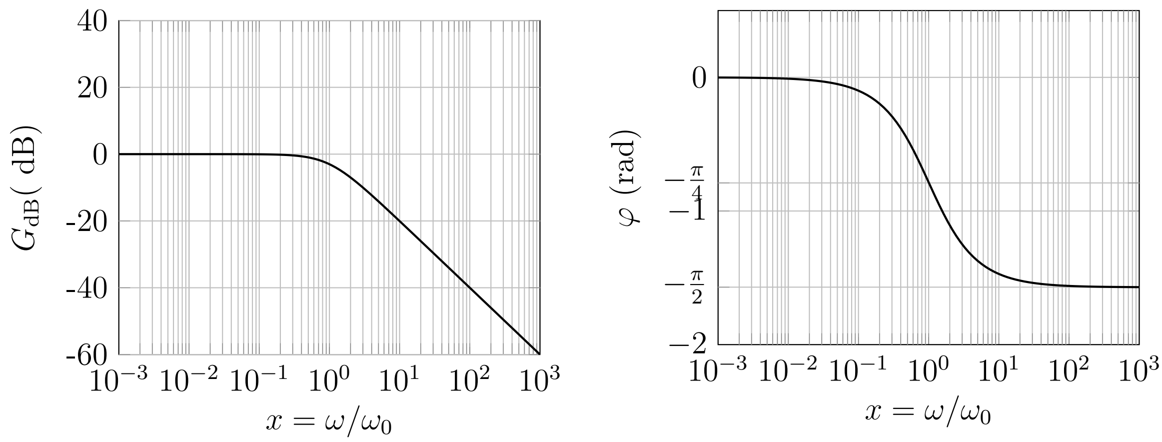


A RETENIR

En quoi est-ce une excellente nouvelle ?

Application - SF3

On considère un filtre dont le diagramme de Bode est donné ci-dessous :



1. Déterminer la nature et l'ordre du filtre.
2. On envoie en entrée le signal de la forme suivante :

$$e(t) = E_0(\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t) + \cos(\omega_3 t))$$

Avec $E_0 = 1$ V, $\omega_1 = \frac{\omega_0}{100}$, $\omega_2 = \omega_0$ et $\omega_3 = 100\omega_0$. Donner l'expression temporelle du signal de sortie.

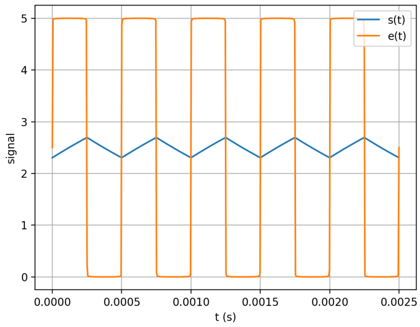
II.D.2 - Exploitation qualitative

Méthode - Expliquer ou anticiper l'effet d'un filtre sur un signal

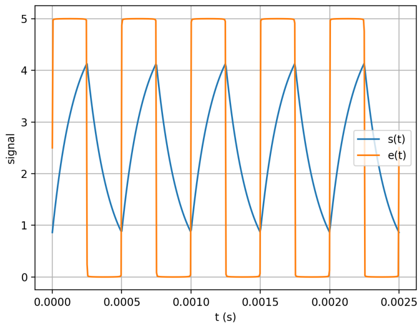
Application - Effet d'un filtre passe-bas d'ordre 1 sur un signal créneau

cf script Python sur le site

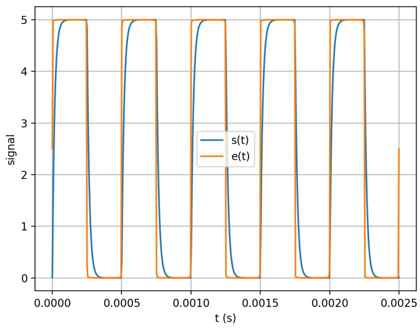
On considère un passe-bas d'ordre 1 de fréquence de coupure f_c. On envoie un signal créneau de fréquence $f_e = 2$ kHz.
Expliquer les signaux obtenus en sortie pour les 3 expériences :
Exp 1 : On impose $f_c = 100$ Hz.



Exp 2 : On impose $f_c = 1$ kHz.



Exp 3 : On impose $f_c = 10$ kHz.



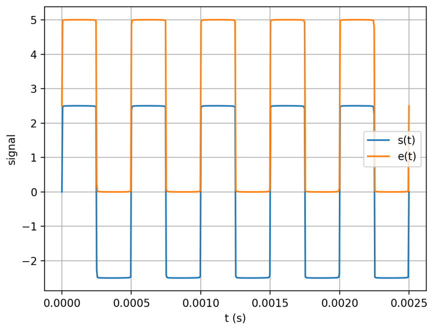
Application - Effet d'un filtre passe-haut d'ordre 1 sur un signal créneau

cf script Python sur le site

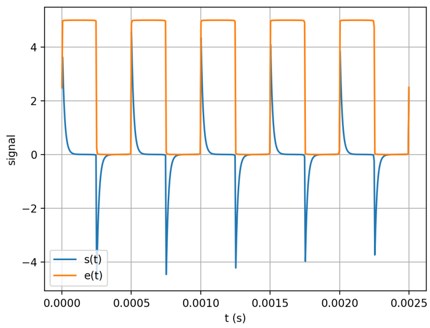
On considère un passe-haut d'ordre 1 de fréquence de coupure f_c. On envoie un signal créneau de fréquence $f_e = 2$ kHz.

Expliquer les signaux obtenus en sortie pour les 2 expériences :

Exp 1 : On impose $f_c = 1$ Hz.



Exp 2 : On impose $f_c = 10$ kHz.



Application - Effet d'un filtre passe-bande sur un signal créneau

cf script Python sur le site

On considère un passe-bande de fréquence de coupure f_c et de facteur de qualité Q. On envoie un signal créneau de fréquence $f_e = 2$ kHz.

Expliquer les signaux obtenus en sortie pour les expériences suivantes (à faire apparaître avec le code python) :

Exp 1 : On impose $f_c = 100$ Hz et $Q = 50$.

Exp 2 : On impose $f_c = 100$ Hz et $Q = 0.5$.

Exp 3 : On impose $f_c = 6$ kHz et $Q = 50$.

Exp 4 : On impose $f_c = 6$ kHz et $Q = 0.5$.

Exp 5 : On impose $f_c = 1000$ kHz et $Q = 5$.

et toutes les suggestions du script !

III - Stabilité des SLCI

III.A - Définition

Définition (Système stable)

Un système est **stable** si sa réponse à un régime forcé borné est bornée.

Rappel - Solutions d'une EDL à coefficients constants

Propriété

III.B - Premier ordre

Stabilité d'un premier ordre

Démonstration

III.C - Deuxième ordre

Stabilité d'un deuxième ordre

Démonstration

Sommaire